Division polynomiale avec reste

Rappelons d'abord que si on a deux entiers naturels $a, b \in \mathbb{N}$, alors il existe une unique paire $q, r \in \mathbb{N}$ telle que

$$a = q \cdot b + r \quad \underline{\text{et}} \quad r \leq b$$

On dit que q est le <u>quotient</u> et r est le <u>reste</u> de la division de a par b.

Cette construction s'appelle <u>division avec reste</u>, ou <u>division euclidienne</u> (parce qu'elle est expliquée dans les "Eléments" d'Euclide)

<u>Exemple:</u>

$$\begin{array}{l|l} 1012 & 72 \\ \hline \underline{7} & 14 \\ 312 & \\ \underline{288} & \\ 24 & \end{array}$$

Donc
$1012 = 14 \times 72 + 24$
$14 =$ quotient
$24 =$ reste.

(on s'arrête lorsque le résidu est < 72)

Pour les polynômes, la division avec reste suit le même principe :

Si $f(t), g(t) \in K[t]$ alors il existe $q(t), r(t) \in K[t]$, uniques, tels que

$$\boxed{f(t) = q(t) \cdot g(t) + r(t)}$$

Avec $\deg(r(t)) < \deg(g(t))$

$q(t)$ est le <u>quotient</u> et $r(t)$ le <u>reste</u> de la division polynômiale.

<u>Exemple</u>

$$f(t) = 2t^5 + t^3 - 2t^2 + t - 3$$

$$g(t) = t^2 - 2t + 2$$

$$
\begin{array}{l|l}
2t^5 + t^3 - 2t^2 + t - 3 & t^2 - 2t + 2 \\
\underline{2t^5 - 4t^4 + 4t^3} & \overline{2t^3 + 4t^2 + 5t} \\
4t^4 - 3t^3 - 2t^2 + t - 3 & \\
\underline{4t^4 - 8t^3 + 8t^2} & \\
5t^3 - 10t^2 + t - 3 & \\
\underline{5t^3 - 10t^2 + 10t} & \\
-9t - 3 &
\end{array}
$$

Donc $r(t) = -(9t+3)$

et $q(t) = 2t^3 + 4t^2 + 5t$.

(On s'arête lorsque le résidu est de degré < 2)